مبرهنة:

ليكن A جبر فوق الحلقة التبديلية والواحدية R و B مثالية في A لنفرض أن ℓ هي مجموعة كل الجبور الجزئية في A التي تحتوي على B وأن ℓ_0 مجموعة كل الجبور الجزئية في جبر الكسر A/B عندئذ يوجد تقابل

$$f: \ell \to \ell_0$$

البرهان:

نعرف الدالة $f: \ell \to \ell_0$ بالشكل الآتي:

[illegible] نلاحظ أن $D \in \ell$ فإن $f(D) = D/B$

واضح أن f تطبيق لأنه إذا كانت $D_1, D_2 \in \ell$ بحيث $D_1 = D_2$ فإنه لأجل كل عنصر $x + B \in D_1/B$ فإن

$$x \in D_1 = D_2 \Rightarrow x + B \in D_2/B$$
$$\Rightarrow D_1/B \subseteq D_2/B$$

ليكن $D_1, D_2 \in \ell$ بحيث $f(D_1) = f(D_2)$ عندئذ $D_1/B = D_2/B$

ليكن $a \in D_1$ عندئذ

$$a + B \in D_1/B = D_2/B \Rightarrow a \in D_2$$
$$\Rightarrow D_1 \subseteq D_2$$

ومنه فإن f متباين

ليكن $\bar{k} \in \ell_0$ ومنه فإن $\bar{k}$ جبر جزئي في A/B عندئذ

$$k = \{a : a \in A,\ a + B \in \bar{k}\}$$

جبر جزئي في A يحوي B أي أن $k \in \ell$ و

$$f(k) = k/B = \bar{k}$$

ومنه فإن f شامل

إذا كان $\bar{D} \subset A/B$ جبر جزئي فإن $\bar{D} = D/B$

تعريف تشاكل الجبور:

ليكن A, B جبرين فوق الحلقة التبديلية والواحدية R نقول عن التطبيق $f: A \to B$ إنه تشاكل إذا حقق:

① $f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \forall a,b \in A$

② $f(\lambda a) = \lambda f(a) \quad \forall \lambda \in R \quad \forall a \in A$

③ $f(a.b) = f(a).f(b)$

ينتج من التعريف مباشرة أن

-أ- $f(0_A) = 0_B$ (حيادي الجمع) (حيادي الضرب المتقابل)

-ب- $f(-a) = -f(a) \quad \forall a \in A$

إثبات (أ)

$f(0+0) = f(0)$

$f(0)+f(0) = f(0)$

بحذف $f(0)$ من الطرفين ينتج $f(0) = 0$

إثبات (ب)

$f(-a+a) = f(0) = 0$ (باستخدام أ)

$f(-a) + f(a) = 0$

بحذف النظير الجمعي $\Rightarrow f(-a) = -f(a)$

مبرهنة :

لتكن $f: A \to B$ تشاكل جبور عندئذٍ

① إذا كان K جبر جزئي في A فإن $f(K)$ جبر جزئي في B

② إذا كان $D \subset L$ جبر جزئي في B فإن $f^{-1}(D)$ جبر جزئي في A

③ النواة $\ker f = \{a : a \in A , f(a) = 0\}$ حيادي الجمع تشكل مثالية في A

④ f متباين $\Leftarrow \ker f = 0$

البرهان :

نفرض K جبر جزئي في A

$f(K) = \{f(k) ; k \in K\}$

① $0 \in f(K) \neq \phi$ $\quad 0 \in K \Rightarrow f(0) \in f(K)$

$\Rightarrow 0 \in f(K)$

② $\forall \alpha, \beta \in R \quad x, y \in f(k)$ ث‍ث $\exists a, b \in k$

$x = f(a)$

$y = f(b)$

$\Rightarrow f(\alpha a + \beta y) = f(\alpha a) + f(\beta b)$

$= \alpha f(a) + \beta f(b)$

$= \alpha x + \beta y$

$\alpha x + \beta y = f(\underbrace{\alpha a + \beta b}_{\in k}) \in f(k)$

$x \cdot y = f(a) f(b) = f(\underbrace{a.b}_{\in k}) \in f(k)$

ومنه $f(k)$ جبر جزئي ع B

② $f^{-1}(D) = \{a ; a \in A : f(a) \in D\}$

$f^{-1}(D) \ni 0 \Leftarrow f(0) = 0 \in D$ لأن $0 \in f^{-1}(D) \neq \phi$

$\forall \alpha, \beta \in R \quad x, y \in f^{-1}(D) \Rightarrow f(x), f(y) \in D$

$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y)$

$= \alpha f(x) + \beta f(y)$

حسب تعريف الصورة العكسية $\Rightarrow \alpha x + \beta y \in f^{-1}(D)$

$f(\underbrace{x \cdot y}_{\in A}) = f(x) \cdot f(y) \in D$

$\Rightarrow x \cdot y \in f^{-1}(D)$

ومنه $f^{-1}(D)$ جبر جزئي ع A

③ $\forall \alpha, \beta \in R \quad \forall x, y \in \ker f$

$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y)$

$= \alpha f(x) + \beta f(y)$

$\alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha(0) + \beta(0)$

$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in \ker f$

ومنه $\ker f$ مودول جزئي في A

شرط المثالية اليسرية

$\forall x \in A \quad \forall y \in \ker f$

$f(x.y) = f(x).f(y)$

$= f(x).0 = 0$

$\Rightarrow x.y \in \ker f$

شرط المثالية اليمنى:

$f(y.x) = f(y) f(x)$

$= 0 f(x)$

$= 0$

$\Rightarrow y.x \in \ker f$

ومنه $\ker f$ مثالي يمني وبالتالي $\ker f$ مثالية في A

(4) مطلوب إثباته

مبرهنة:

لتكن A جبراً على الحلقة R و B مثالية في A عندئذ لتشكل جبر خارجي

البرهان:

لنفرض أن B مثالية في A عندئذ A/B جبر لنعرف العلاقة

$\pi : A \longrightarrow A/B$

$\forall a \in A \quad \pi(a) = a + B$

لنبرهن أن π تطبيق

$\forall a,b \in A \quad a = b$

$a + B = b + B$

$\pi(a) = \pi(b)$

يجب الانتباه عند دراسة التباين ~~[illegible]~~ اذا كان في الشكل جبر خارجي

لنبرهن أن π تشاكل

$$\forall a,b \in A \Rightarrow \pi(a+b) = (a+b)+\beta$$
$$= (a+\beta)+(b+\beta)$$
$$= \pi(a)+\pi(b)$$

$$\pi(a\cdot b) = (a\cdot b)+\beta$$
$$= (a+\beta)\cdot(b+\beta)$$
$$= \pi(a)\cdot\pi(b)$$

$$\forall \lambda \in R \quad a \in A$$
$$\pi(\lambda a) = \lambda a+\beta = \lambda(a+\beta)$$
$$= \lambda\,\pi(a)$$

لنبرهن أنه تام

$$\forall a+\beta \in A/\beta \qquad a \in A$$
$$\Rightarrow \pi(a) = a+\beta$$

لنبرهن أن $ker\,\pi = \beta$ (صفري المستقر)

$$\forall x \in ker\,\pi \Rightarrow \pi(x) = \beta$$
$$\left.\pi(x) = x+\beta\right\} \Rightarrow x+\beta = \beta$$
$$\Rightarrow x \in \beta$$
$$\Rightarrow ker\,\pi \subseteq \beta$$

$$\forall y \in \beta \qquad y+\beta = \beta$$
$$\pi(y) = \beta$$
$$\Rightarrow y \in ker\,\pi$$
$$\Rightarrow \beta \subseteq ker\,\pi \Rightarrow ker\,\pi = \beta$$

تطبيقات الاشتقاق :

ليكن A, B جبرين فوق الحلقة التبديلية والاحادية R ، d: A ⟶ B تطبيق نقول أن d تطبيق اشتقاق إذا تحقق

$\forall a, b \in A \quad \forall \lambda \in R$

① $d(a+b) = d(a) + d(b)$

② $d(\lambda a) = \lambda d(a)$

③ $d(a.b) = d(a) b + a d(b)$

لدينا $o: A \to B$ التطبيق الصفري

$I_A: A = B$ التطبيق المطابق

ينتج من التعريف مباشرة أن التطبيق الصفري هو تطبيق اشتقاق ولأجل $A = B$ فإن التطبيق المطابق $I_A: A \to A$ هو تطبيق اشتقاق

مثال:

ليكن A جبر فوق الحلقة R ، $a \in A$ عنصر في الحلقة

$d_a: A \to A$

$\forall x \in A \;:\; d_a(x) = ax - xa$

هو تطبيق اشتقاق في A.

الإثبات :

شرط التطبيق　$\forall x, y \in A \;,\; \forall \lambda \in R$

$x = y$

$ax - xa = ay - ya$

$\Rightarrow d_a(x) = d_a(y)$

أي أن d_a تطبيق

لنثبت تحقق الشروط

$d_a(x+y) = a(x+y) - (x+y)a$

$= ax + ay - xa - ya$

$= ax - xa + ay - ya$

$= d_a(x) + d_a(y)$

$d(\lambda x) = a(\lambda x) - (\lambda x)a$
$= \lambda(ax) - \lambda(xa)$
$= \lambda(ax - xa)$
$= \lambda d_a(x)$

(3) $d_a(x.y) = a(x.y) - (x.y)a$
$= (ax)y - x(y.a) + xay - xay$ جمع وطرح

$= (axy - xay) + xay - xya$
$= (ax - xa)y + x(ay - ya)$
$= d_a(x)y + x\, d_a(y)$

نتيجة: (على التشاكل الجبري)
ليكن $f: A \to B$ تشاكل جبري عندئذٍ
① $Im f = f(A)$ جبر جزئي في B (صورة التطبيق)
② $ker f$ جبر جزئي في A

مبرهنة:
$d: A \to A$ تطبيق اشتقاق على الجبر A
أ) $Im(d)$ معامل جزئي في A
ب) $ker(d)$ جبر جزئي في A

البرهان:
① $0 \in Im(d) \neq \phi$ $Im(d) \subseteq A$
$\forall x, y \in Im(d)$ $\forall \alpha, \beta \in R$
$\exists a, b \in A \;;\; x = d(a)$
$y = d(b)$

$d(\alpha a + \beta b) = d(\alpha a) + d(\beta b)$

$\in A \qquad = \alpha d(a) + \beta d(b)$

$= \alpha x + \beta y \in Im(d)$

$a \in A \ , \ x = f(a) \in f(A) = Im A$

$\Leftarrow$ Im d جبر جزئي من A

② $0 \in ker(d) \neq \phi$

$\forall x, y \in ker d \qquad \forall \alpha, \beta \in R$

$\Rightarrow d(\alpha x + \beta y) = d(\alpha x) + d(\beta y)$

$= \alpha d(x) + \beta d(y)$

$= \alpha 0 + \beta 0$

$= 0$

$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in ker d$ 　　 ker d معدل جزئي في A

$d(x.y) = d(x) y + x. d(y)$

$= 0 y + x . 0$

$= 0$

$\Rightarrow x y \in ker d$

$\Leftarrow$ ker d جبر جزئي A